# 関数の正体をさぐれ！

## ～教科書の図は完全でない!?～

兵庫県立小野高等学校

普通科

科学総合コース　66回生

河合茉那佳　　木谷　聖人

徳平　拓朗　　菅野　聡　　藤原　光

目 次

# 1　序文

**教科書は正しいと思っていた。**しかし、数学の教科書に指数対数・対数関数のグラフの交点についての説明があったが、先生の本当に交点の数はこの教科書の通りで正しいのかという発言に驚いた。私たちは、教科書は間違っているのか、本当はどうなっているかということに興味を持ち調べてみることにした。

まず私たちは FunctionView[1] というコンピューターのソフトを使い、2 つのグラフを描画した。すると、ある一定の範囲で、教科書には記載されていないグラフの交点が確認できた。その交点の座標を一般化するために、数学のさまざまな分野から研究を進めていくことにした。この時点でまだ微分法は習っていなかった。

# 2　前提知識

## 2.1　指数関数と対数関数

**指数関数**

$a>0$ のとき、$y=a^x$ であらわされる関数を指数関数という。このとき $a$ のことを底という。(図 1)

**対数関数**

$a\neq 1$ かつ $a>0$ ($a\in\mathbb{R}$) のとき、任意の正の $x$ ($x\in\mathbb{R}$) に対し $x=a^p$ を満たす実数 $p$ が唯一定まる。この $p$ を $p=\log_a x$ と書き、$p$ のことを $a$ を底とする $x$ の対数という。このとき $x$ のことを真数という。一般に $y=\log_a x$ であらわされる関数を対数関数という。(図 2)

## 2.2　逆関数と合成関数

**逆関数**

関数 $f(x)$ があるとき、逆に $y$ の任意の値に対して $x$ の値がただ 1 つに定まる場合がある。この場合、$x$ は $y$ の関数となり、$x=g(y)$ とあらわすとする。一般的に独立変数を $x$、変数 $x$ に対応する従属変数を $y$ と書き表すので、$y=g(x)$ と書き直す。この関数 $g(x)$ を、$f(x)$ の逆関数という。関数 $f(x)$ の逆関数を、一般的に $f^{-1}(x)$ と表す。関数 $y=f(x)$ のグラフと、$y=f^{-1}(x)$ のグラフは、直線 $y=x$ に関して対称である。

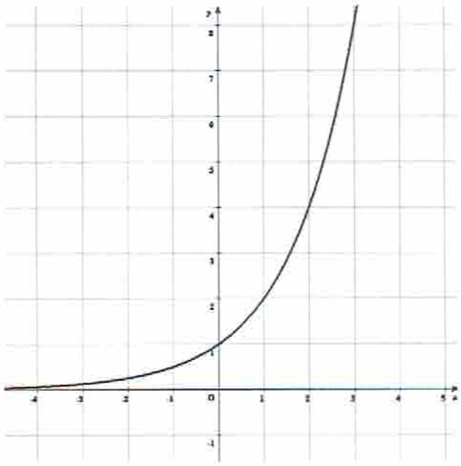

図 1　指数関数 $y = 2^x$ のグラフ

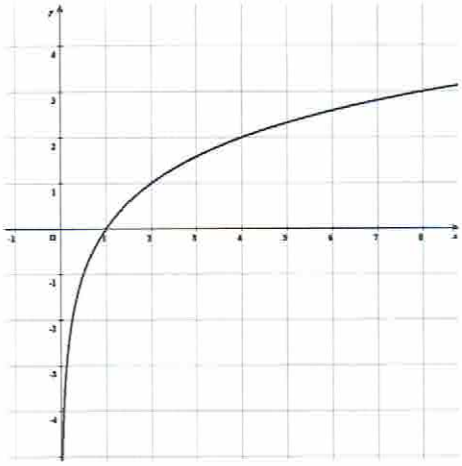

図 2　対数関数 $y = \log_2 x$ のグラフ

**合成関数**

一般に 2 つの関数 $f(x)$、$g(x)$ があり、$f(x)$ の値域が $g(x)$ の定義域に含まれているとする。このとき、新しい関数 $g(f(x))$ が考えられる。この関数を、$f(x)$ と $g(x)$ の合成関数といい、$g \circ f(x)$ とあらわすこともある。

## 2.3　2 周期点

2 周期点とは、$y = f(x)$ のグラフ上の $(f \circ f)(p) = p$ を満たす点のことを言う。
$f(x) = -\frac{1}{2}(x-1)^2 + 3$ と定義し、具体例を示す。$f(x)$ に $x = 1$ を代入すると、$f(1) = 3$ が導出される。次に、$x = 3$ を $f(x)$ に代入すると、$f(3) = 1$ が導出される。これは最初に代入した値と同じであり、導出される値を $f(x)$ に代入するという行為を繰り返しても、$f(x)$ がとる値は 1 と 3 のみである。これを図 3 のように $y = f(x)$ として $xy$ 平面に表す。この操作によってえられる点は $(1,3)$ と $(3,1)$ のみである。このような点を 2 周期点という。また、直線 $y = x$ との交点を 1 周期点といい、不動点ともいう。1 周期点は 2 周期点でもある。

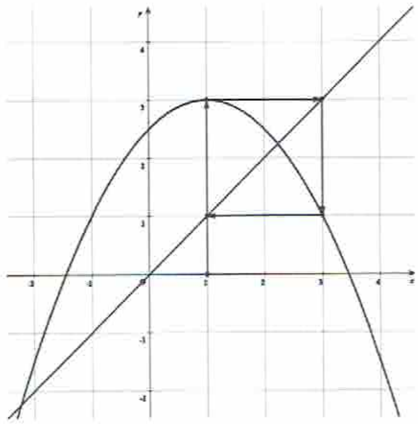

図 3　2 周期点の例

## 3　探究内容

### 3.1　2 つのグラフの交点

私たちが使っている数学のどの出版社の教科書にも、指数関数・対数関数の分野でまったく同じような展開がある。つまり、

(Step1)$y = a^x$ と $y = \log_a x$ のグラフは $y = x$ に関して線対称であることの証明。

(Step2)$y = (\frac{1}{2})^x$ と $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ のグラフを描かせる。

(Step3) 図 4 のように「下の図のようになる」と言い切っている。

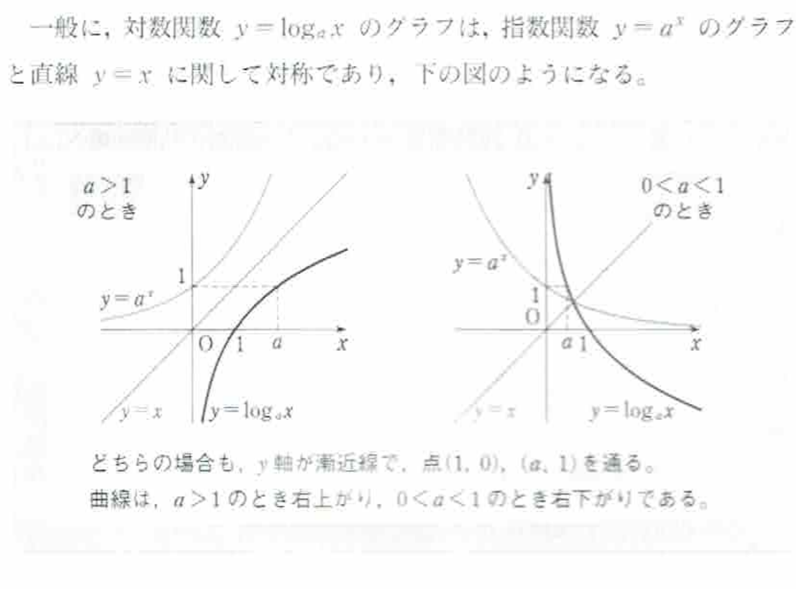


図 4　教科書

ここでは、$y=a^x$ と $y=\log_a x$ のグラフが、底が $a>1$ のときと $0<a<1$ のときで場合分けをして同じ平面上に描かれている。教科書は交点の個数について言及していないが、このような書き方では、底を変化させたとき、2 つのグラフの交点は底が $0<a<1$ のときの 1 点のみであると思いこむ危険性がある。しかし交点の個数による場合分けは 0 個と 1 個の 2 通りだけではないことがわかった。私たちは、底が $0<a<1$ 場合の指数関数と対数関数のグラフについて探究した。

この場合分けは、「$y=a^x$ と $y=\log_a x$ の交点の個数を求めよ」という問題と同値である。ここでは、$0<a<1$ において交点を 3 つもつ場合の $a$ の値の範囲を求める。

(解法)

指数対数と対数関数が 3 点で交わるような底 $a$ の値の範囲を求める。

$$y=f(x)=\log_a x$$
$$y=g(x)=a^x$$

とおく $(a>0)$。グラフより、$y=f(x)$ と $y=g(x)$ が交点を 3 つもつ可能性があるのは $0<a<1$ のときで、$0<a<1$ のとき、$y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフは、直線 $y=x$ 上に自明な交点を 1 つもつ。この交点を $P(m,m)$ とすると、$m$ は $0<m<1$ で

$$m=a^m, m=\log_a m-(*)$$

をみたす。$0<a<1$ のとき、$f(x),g(x)$ はともに単調減少であり、点 P における $f(x)$ と $g(x)$ の接線の傾きはともに負であるので、$\mathrm{f}'(m)=\frac{1}{m\log a}<0$ かつ $g'(m)=a^m\log a<0$ である。グラフより、$f'(m)<g'(m)<0$ のとき、$y=f(x)$ と $y=g(x)$ は交点を 1 つもつ (図 5)。また、$g'(m)<f'(m)<0$ のとき、$y=f(x)$ と $y=g(x)$ は交点を 3 つもつ (図 6)。よって交点を 3 つもつのは、$g'(m)<f'(m)<0$ より $a^m\log a<\frac{1}{m\log a}<0$ のときある。(*) より、$m=a^m$ だから、$m\log a<\frac{1}{m\log a}<0$。これに $m\log a(<0)$ をかけて、

$$(m\log a)^2>1>0$$

$m\log a<0$ より

$$m\log a<-1$$

$m$ に (*) の $m=\log_a m$ を代入して、

$$\log_a m\cdot\log a<-1$$
$$\log m<-1$$

よって、$0<m<1$ であるから、$0<m<\frac{1}{e}$ のとき、$y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフは交点を 3 つもつ。

このとき、$m = a^m$ より、$\log m = m \log a$ だから、

$$\log a = \frac{\log m}{m}$$

$\log a$ と $m$ の関係をグラフにすると図 7 のようになり、

$$0 < m < \frac{1}{e} \longleftrightarrow \log a < -e$$

したがって、

$$a < e^{-e} = \frac{1}{e^e}(< 1)$$

$0 < a < 1$ より、

$$0 < m < \frac{1}{e} \Longleftrightarrow 0 < a < \frac{1}{e^e}$$

よって、$y = f(x)$ と $y = g(x)$ が交点を 3 つもつのは、$0 < a < \frac{1}{e^e}$ のときである。■

また、$1 < a$ のとき、$1 < a < e^{\frac{1}{e}}$ の範囲において、$y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフは交点を 2 つもつ。ここで、$\frac{1}{e^e}$ は約 0.06、$e^{\frac{1}{e}}$ は約 1.44 である [2]。以上のことにより、交点の個数による正しい場合分けは以下の図 8〜図 13 のようになる。ただし、グラフにおいて点線は $y = f(x) = \log_a x$ を、実線は $y = g(x) = a^x$ を表す。

$y = \frac{\log x}{x}$ のグラフ

$y = \frac{\log x}{x}$ のグラフは、入試問題において頻出であり、出題率は No.1 と言ってもよい。指数対数と対数関数が 3 点で交わるような底 $a$ の値の範囲を求める際には、入試頻出の $y = \frac{\log x}{x}$ のグラフを利用することから、この問題は非常に良い問題といえるのではないだろうか。

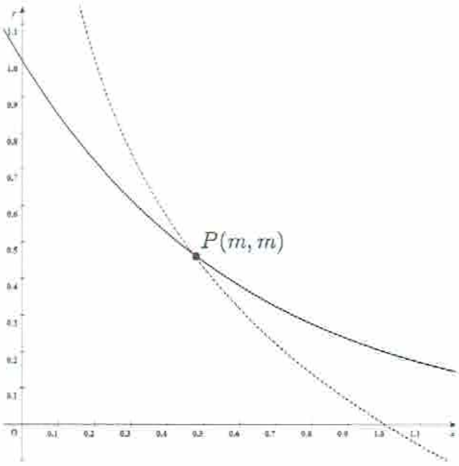


図 5　$f'(m) < g'(m) < 0$（交点 1 つ）

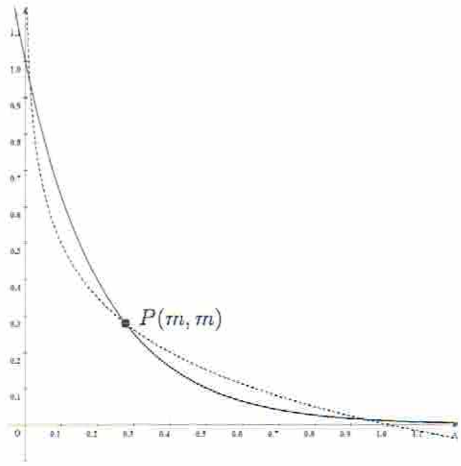


図 6　$g'(m) < f'(m) < 0$（交点 3 つ）

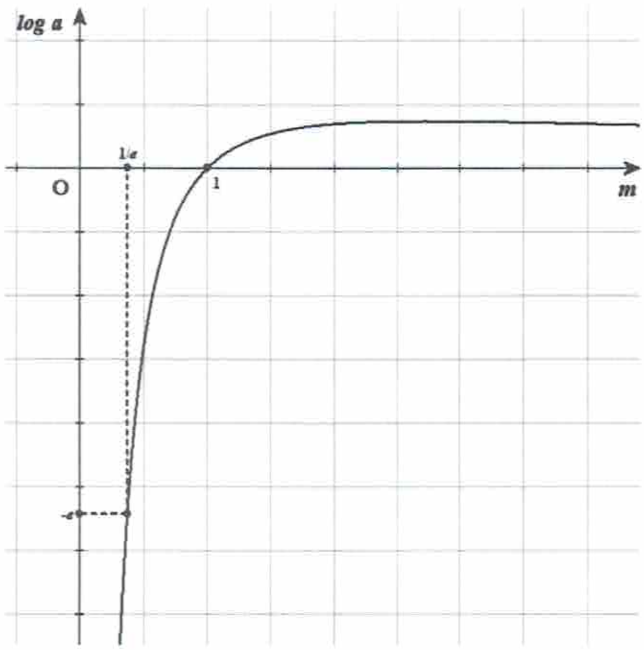


図 7　$\log a = \frac{\log m}{m}$ のグラフ

$\boxed{a > 1 \text{ のとき}}$

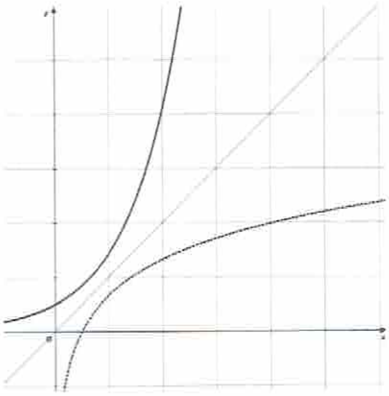

図 8　$e^{\frac{1}{e}} < a$ のとき

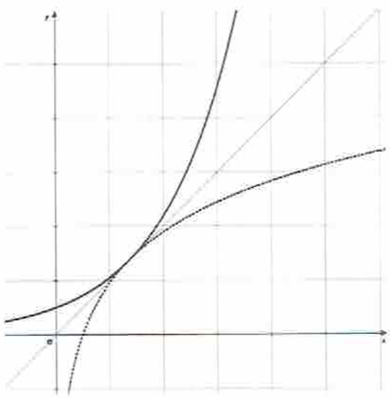

図 9　$a = e^{\frac{1}{e}}$ のとき

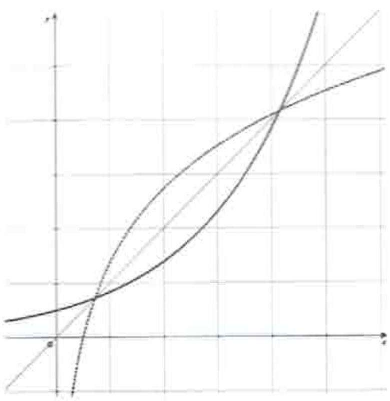

図 10　$1 < a < e^{\frac{1}{e}}$ のとき

$\boxed{0 < a < 1 \text{ のとき}}$

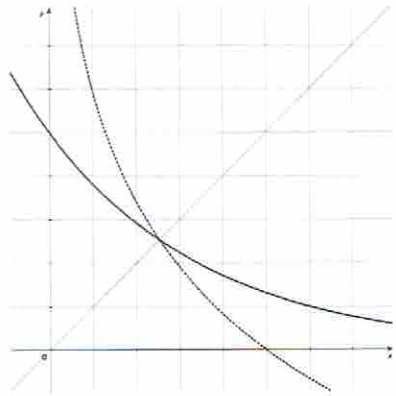

図 11　$\frac{1}{e^e} < a < 1$ のとき

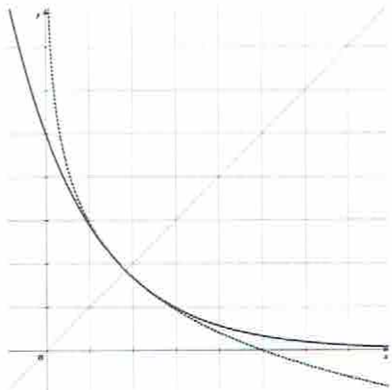

図 12　$a = \frac{1}{e^e}$ のとき

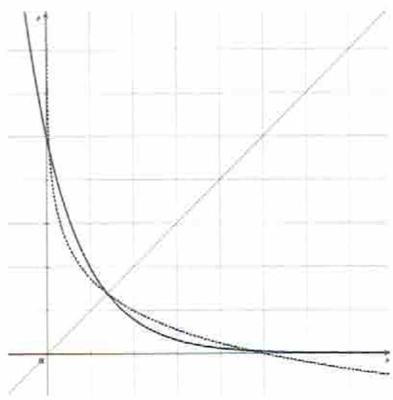

図 13　$0 < a < \frac{1}{e^e}$ のとき

### 3.2 交点の軌跡

上の場合分けにおいて、$0 < a < \frac{1}{e^e}$ のとき、指数関数と対数関数のグラフの交点は 3 つ存在する（図 13）。このとき、$a$ の値を $0 < a < \frac{1}{e^e}$ の範囲で動かすと、3 つの交点はどのような軌跡を描くのだろうか。

私たちは、グラフ描画ソフトの FunctionView[1] を用い、a の値を動かして交点に印をつけ、折れ線で結ぶことによって交点の軌跡の概形を予想した（図 14）。また、$y = a^x$ と $y = \log_a x$ のグラフの交点の $x$ 座標は、次の方程式を満たす $x$ である。

$$a^x = \log_a x$$

したがって、この方程式を $x$ について解くことができれば、そこから軌跡の方程式が導けると考えた。しかし、式変形を繰り返しても $x =$（$a$ の式）の形にすることが困難であったため、この方程式は一般に解くことができない方程式であると予想した。

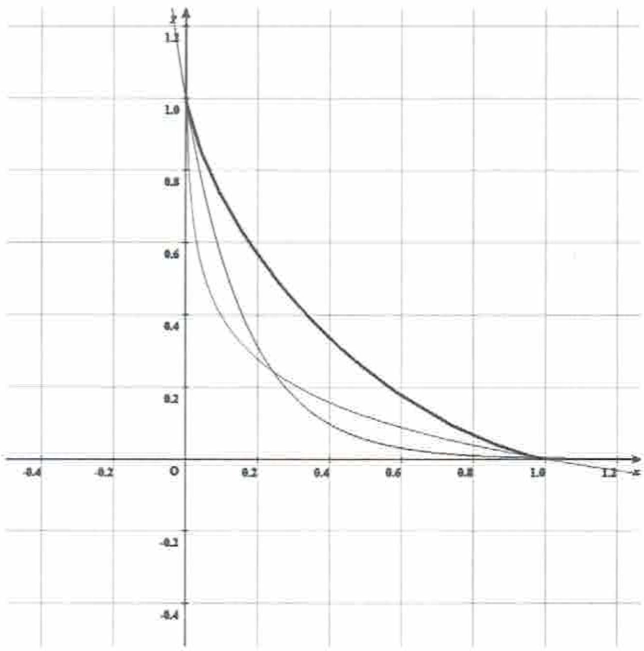

図 14　太線が、予想した軌跡の概形

#### 3.2.1　Newton 法によるプロット

まず $y = a^x$ と $y = \log_a x$ の差のグラフである、$y = h(x) = a^x - \log_a x$ というグラフを考える（図 15）。$h(x) = 0$ となる点が、$y = a^x$ と $y = \log_a x$ の交点である。つまり、$y = h(x)$ と $x$ 軸との交点の座標を求めればよい。そこで、$x$ 軸との交点の座標を近似するのに Newton 法 [3] を用いた。Newton 法により、ある $a$ に対し $h(x) = 0$ を満たす $x$ を近似することができた。

近似によって求められた $x$ の値を $y=a^x$（または $y=\log_a x$）に代入することで、$y$ の近似値が求まる（図 16）。これらの $(x,y)$ を $xy$ 平面上にプロットすると [4] [5]、$a$ の値を動かしたときの交点の軌跡を近似的に得ることができた（図 17）。

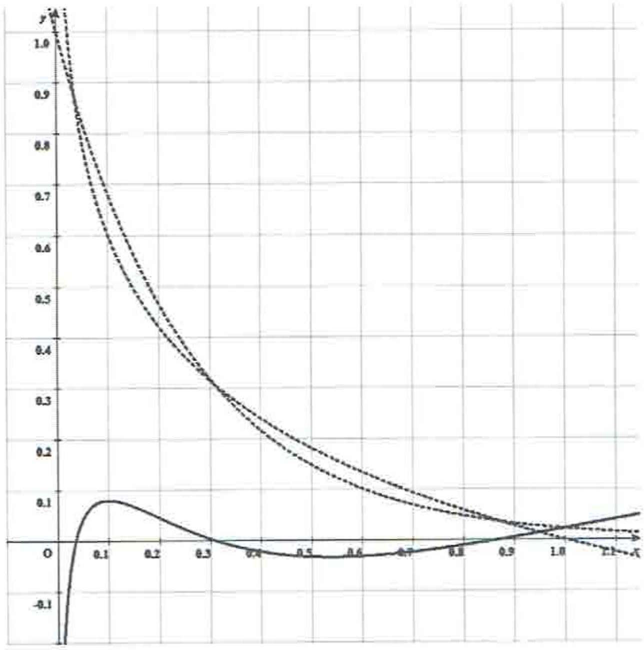

図 15　実線が $y=a^x-\log_a x$ のグラフ。この図のとき、グラフは 0.05 付近、0.3 付近、0.85 付近に $x$ 軸との交点をもっている。

| a | x | y |
|---|---|---|
| 0.02 | 0.031461 | 0.88419 6 |
| 0.03 | 0.056133 | 0.821327 |
| 0.04 | 0.0896 | 0.749453 |
| 0.05 | 0.137357 | 0.662666 |
| 0.06 | 0.216889 | 0.543243 |
| 0.07 | 0.371883 | 0.371973 |
| 0.08 | 0.381502 | 0.381528 |
| 0.09 | 0.390497 | 0.390512 |
| 0.1 | 0.399007 | 0.399018 |
| ... | ... | ... |

図 16　それぞれの $a$ の値について $h(x)=0$ を満たす最小の $x$ の値と、そのときの $y$ の値

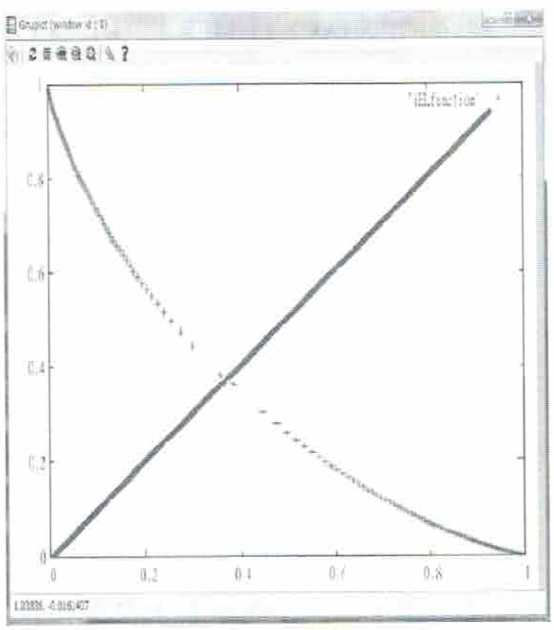

図 17　$x$ の値と $y$ の値をプロットした。横軸は $x$、縦軸は $y$

### 3.2.2 軌跡の方程式

方程式を解くことはできないと予想したが、$y = a^x$ と $y = \log_a x$ をそれぞれ変形することによって、$x =$ ($a$ の式) に表すことはできなくても、軌跡の方程式を直接導くことができた。

$$
\begin{aligned}
&\begin{cases} y = a^x \\ y = \log_a x \end{cases} \\
\Longrightarrow &\begin{cases} y = a^x \\ a^y = x \end{cases} \\
\Longrightarrow &\begin{cases} y^y = a^{xy} \\ x^x = a^{yx} \end{cases} \\
\Longrightarrow &\ y^y = x^x
\end{aligned}
$$

私たちはこの方程式 $y^y = x^x$ を **iEL function** と命名した (Intersections of Exponential function and Logarithmic function：指数関数と対数関数の交点　の略)。ただし、$y^y = x^x$ は $a^x = \log_a x$ であるための必要条件だから、$y^y = x^x$ のグラフの一部が $y = a^x$ と $y = \log_a x$ のグラフの交点の軌跡となっている (図 18)。

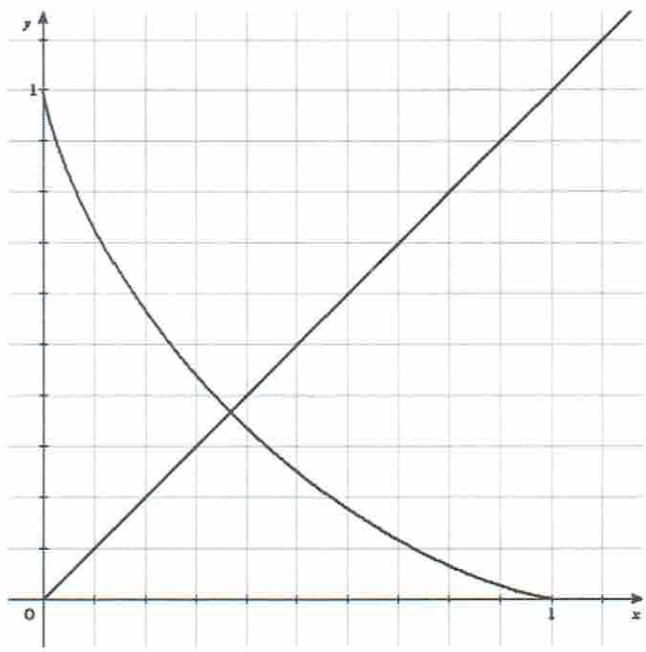


図 18　$y^y = x^x$ のグラフ

## 3.3 逆関数と２周期点

互いに逆関数である２つのグラフの交点の数について考える。

$$
\begin{aligned}
&y = f(x) \text{ と } y = f^{-1}(x) \text{ の交点の数} \\
&\Longleftrightarrow f(x) = f^{-1}(x) \text{ を満たす } x \text{ の個数} \\
&\Longleftrightarrow (f \circ f)(x) = x \text{ を満たす } x \text{ の個数} \\
&\Longleftrightarrow 2 \text{ 周期点の個数}
\end{aligned}
$$

したがって、互いに逆関数である２つのグラフの交点の個数は、どちらか片方のグラフの２周期点の個数に等しいことが示された。$y = f(x)$ のグラフの２周期点の個数を求めたい場合、従来は定義に従って $y = (f \circ f)(x)$ のグラフを描き、それと $y = x$ との交点の個数を数えていた。しかし、$y = (f \circ f)(x)$ のグラフは複雑であることが多い。そこで、逆関数である $y = f^{-1}(x)$ を、$y = f(x)$ のグラフを直線 $y = x$ に関して対称に折り返すことによって描く。$y = f(x)$ と $y = f^{-1}(x)$ の交点の数が、２周期点であるため比較的簡単に求まる。したがって、逆関数を利用することで、２周期点の個数は簡単に予想することができる。下図 19〜22 はイメージ図。

このことから、$y = a^x$ と $y = \log_a x$ は互いに逆関数であるため、$y = a^x$ のグラフを $y = x$ に関して対称に折り返したグラフの交点の個数が２周期点の個数である。$0 < a < \frac{1}{e^e}$ のとき、$y = a^x$ と $y = \log_a x$ の交点は３つ存在するため、このとき $y = a^x$（または $y = \log_a x$）のグラフの２周期点は３つあることがわかる。

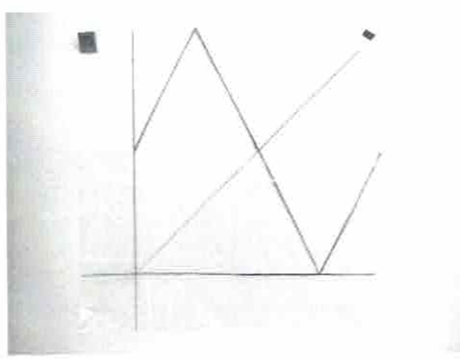

図 19　図のような関数 $y = f(x)$ の２周期点の個数を求めたい。

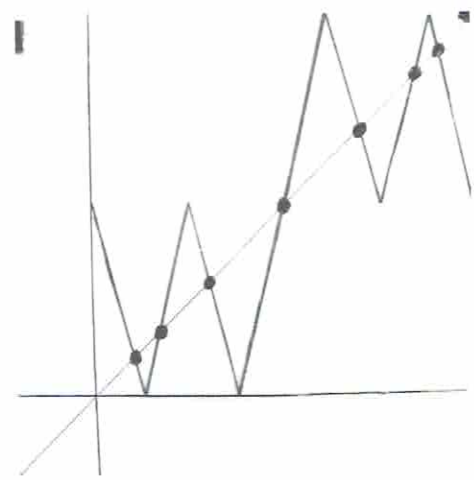

図 20　定義に従って $y = (f \circ f)(x)$ のグラフを描き、それと $y = x$ との交点が２周期点であるが、複雑でややこしいことが多い。

図 21　そこで、図 19 のグラフを直線 $y=x$ で折り曲げる。

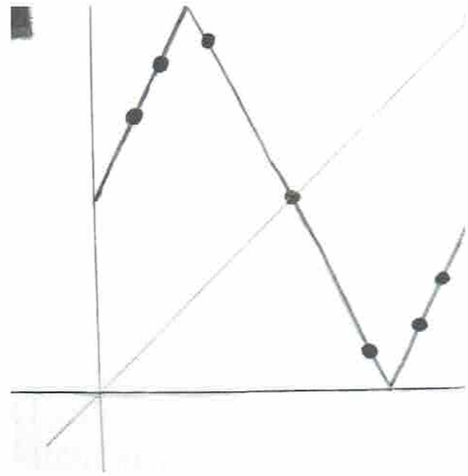

図 22　図 21 で、グラフが重なった点の個数が 2 周期点の個数である。

### 3.4　ランベルトの W 関数との関連性

$y=a^x$ と $y=x$ の交点を考える。交点の $x$ 座標は、次の方程式の解である。

$$a^x = x$$

この方程式を解くためには**ランベルトの W 関数**が用いられる [6]。この方程式の解き方を以下に示す。

$$\begin{aligned} a^x &= x \\ e^{\log a^x} &= x \\ 1 &= xe^{-\log a^x} \\ 1 &= xe^{-x\log a} \\ \log a &= x\log a \ \cdot \ e^{-x\log a} \\ -\log a &= -x\log a \ \cdot \ e^{-x\log a} \end{aligned}$$

ここで、 $y=xe^x$ に対して $x=ye^y$ なる逆関数を考える。つまり

$$x = ye^y \Longleftrightarrow y = W(x)$$

とあらわし、これをランベルトの W 関数という。(図 23)

私たちは、軌跡の方程式をランベルトの W 関数で表すことができないだろうかと考えた。

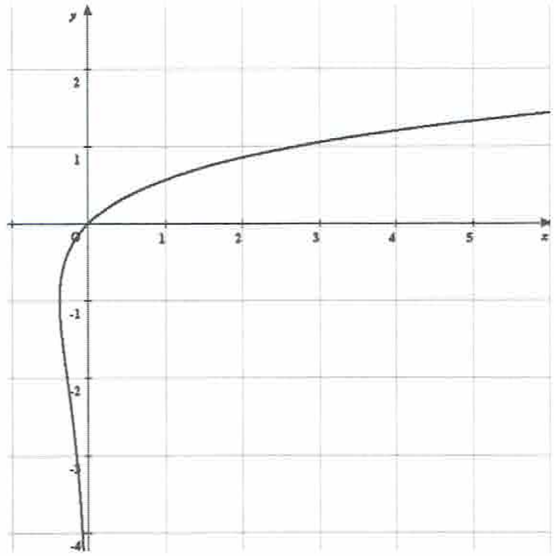

図 23　ランベルトの W 関数 $x = ye^y$ のグラフ

$$
\begin{aligned}
y^y &= x^x \\
&\Longrightarrow y\log y = x\log x \\
&\Longrightarrow e^{\log y}\cdot\log y = x\log x \\
&\Longrightarrow \log y = W(x\log x) \\
&(\Longleftrightarrow x\log x = \log y e^{\log y}) \\
&\Longrightarrow y = e^{W(x\log x)} \\
&(\Longleftrightarrow y = \frac{x\log x}{W(x\log x)})
\end{aligned}
$$

以上の式変形から、軌跡の方程式はランベルトの W 関数を用いてあらわすことができた。

# 4　まとめ

指数関数と対数関数は、$0 < a < \frac{1}{e^e}$ の範囲では交点を 3 つもつ。そのうち、直線 $y = x$ 上にない 2 つの交点の座標は式であらわすことはできないが、3 つの交点の軌跡は導出することができ、その方程式は $y^y = x^x$ であることを発見した。

3 つの交点の軌跡は、「ランベルトの W 関数」という関数を用いて表現することもできる。また、3 つの交点のうち、直線 $y = x$ 上に存在しない 2 つの点は 2 周期点となっている。2 周期点は、その関数の逆関数を用いることで、合成関数と直線を用いるよりも簡単に予想できることが分かった。

私たちの iEL function は単純で美しい式の形をしており、自然対数の底 $e$ を含んでいないことも興味深い。しかしあまり目にすることのないものであり、自然界における現象との関連などが期待される。私たちの研究が、今後の科学の発展に貢献できれば幸いである。

## 謝辞

今回の探究を行うにあたって、花房先生には研究の参考になる数学知識、発表の仕方のアドバイスや様々な予備知識など教えていただきました。また私たちは、「第 5 回サイエンスフェア in 兵庫」で発表する機会があり、その際には花房先生や牛尾先生に私たちがよりよい発表ができるよう指導していただきました。他校の生徒や企業と交流でき、私たちの研究をより深めることができました。さらに研究では Function View をはじめとする多数のソフトウェアを使用することにより、関数のグラフを表示したり複雑な計算を行ったりすることができました。私たちの探究をここまで進めてこられたのは、協力してくださった多くの方々のおかげです。本当にありがとうございました。

## 使用ソフト・参考文献

[1] 高機能関数グラフ・図形表示ソフト FunctionView
http://hp.vector.co.jp/authors/VA017172/
[2] Wolfram Alpha
http://www.wolframalpha.com/
[3] ニュートンの近似法
http://izumi-math.jp/sanae/MathTopic/newton/newton.htm
[4] gnuplot
http://gnuplot.info/
[5] gnuplot の初歩
http://graph.pc-physics.com/
[6] ランベルトの W 関数 - Wikipedia
http://ja.wikipedia.org/wiki/